

Théorème : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\widehat{f}}(-x) = 2\pi f(x)$.

Considérons la fonction $\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ et l'approximation de l'unité associée $\delta_a(x) = \frac{1}{a} \delta\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.

Étape 1 : On a : $\delta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ d'où $\widehat{\delta}_a(\xi) = \widehat{\delta}(\xi/a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ et $\widehat{\widehat{\delta}_a} = 2\pi \delta_a(x)$.

Étape 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \delta_{a^{-1}}(\xi) \xrightarrow{\quad} \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \widehat{\delta}_{a^{-1}}(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{-1}} \delta_a(x) = 2\pi \delta_a(x)$$

$$\begin{aligned} \widehat{f * \delta_a}(-x) &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\widehat{f * \delta_a}(\xi)}_{=\widehat{f}(\xi)\widehat{\delta_a}(\xi)} e^{ix\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \widehat{\delta_a}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\eta) \widehat{\widehat{\delta_a}(\xi) e^{ix\xi}}(\eta) d\eta \quad \text{par la formule d'échange} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\eta) \widehat{\delta_a}(\eta - x) d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2\pi \widehat{f}(\eta) \delta_a(x - \eta) d\eta \xrightarrow{\quad} \text{car } \delta_a(-a) = \delta_a(a) \\ &= 2\pi (f * \delta_a)(x) \end{aligned}$$

D'où $\widehat{\widehat{f * \delta_a}}(-x) = 2\pi (f * \delta_a)(x)$.

Étape 3 : • Puisque $(\delta_a)_{a>0}$ est une approximation de l'unité, $\|f * \delta_a - f\|_1 \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$.

Donc il existe $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $(f * \delta_{a_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers f pp.

• On a : $\widehat{f * \delta_a}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{\delta_a}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2a^2}} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \widehat{f}(\xi)$

• $|\widehat{f * \delta_a}(\xi)| = |\widehat{f}(\xi)| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2a^2}} \leq |\widehat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$

Donc par convergence dominée, $\|\widehat{f * \delta_a} - \widehat{f}\|_1 \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$.

D'où $\|\widehat{f * \delta_a} - \widehat{f}\|_\infty = \|\widehat{f * \delta_a} - \widehat{f}\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (\widehat{f * \delta_a}(\xi) - \widehat{f}(\xi)) e^{ix\xi} d\xi \right|$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f * \delta_a}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| d\xi$$

$$= \|\widehat{f * \delta_a} - \widehat{f}\|_1 \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$$

D'où $(\widehat{f * \delta_{a_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\widehat{\widehat{f}}(-x) \xleftarrow{k \rightarrow \infty} \widehat{\widehat{f * \delta_{a_k}}}(-x) = 2\pi (f * \delta_{a_k})(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{pp} 2\pi f(x)$

Ainsi, $\widehat{\widehat{f}}(-x) = 2\pi f(x)$ dx-pp.